ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΝ	**ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018-2019**
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ	**Γ΄ Λυκείου (7-ωρο)**

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\eta\mu x}{2e^x+x-2}$.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\left(4x^3+\eta\mu 3x-\dfrac{1}{x}\right)dx$.

3. (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ .
   (β) Πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) έχουν όλα τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις

4. (α) Να γράψετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης συνάρτησης $y=f(x)$.

   (β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha x+\dfrac{\beta}{x}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή των α και β για την οποίες η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο το σημείο $(2,8)$.

   (γ) Αν $\alpha=1$ και $\beta=8$ να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης f του ερωτήματος (β).

5. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ και τα ενδεχόμενα του $\mathrm{A}=\{\alpha,\beta\}$ και $\mathrm{B}=\{\alpha,\gamma\}$ με $P(\mathrm{A})=\dfrac{2}{3}$ και $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{2}$.

   (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω.
   (β) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:
   $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, $P(\mathrm{B}-\mathrm{A})$, $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')$ και $P(\mathrm{A}'\cup\mathrm{B}')$

6. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon):3x-4y-8=0$ και ο κύκλος $C:x^2+y^2-4x+6y-3=0$

   (α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο C σε 2 σημεία.

   (β) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου C να βρεθεί η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου που διχοτομεί τη χορδή ΑΒ.

7. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle

   (β) Αν η συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και επιπλέον

   ισχύει $f(3)-f(1)=26$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$.

8. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο της $\mathrm{M}(5\text{συν}\theta,4\text{ημ}\theta)$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο N. Αν η $\mathrm{NE}'\perp\mathrm{MN}$, να δείξετε ότι ME είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων, όπου E' και E οι εστίες της έλλειψης.

9. Να βρείτε συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln x\cdot f'(x)=-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x}\cdot f(x),\ \forall x\in(1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση περνά από το σημείο $\left(e,\dfrac{e^2+5}{e}\right)$.

10. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[-1,1]$ για τις οποίες ισχύουν $f(x)=f(-x)$ και $g(-x)=-g(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2019^{g(x)}+1}\,dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

---

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-2}$

   Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

2. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(2,0)$ και $\mathrm{B}(5,0)$ και η ευθεία $x=-1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Γ πάνω στην ευθεία $x=-1$, με $y_\Gamma>0$, ώστε η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ να είναι μέγιστη.

3. (α) Να δείξετε ότι το μερικό άθροισμα των ν πρώτων όρων της πιο κάτω σειράς $\left(\nu \in \mathrm{N}\right)$

$$\frac{2}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^3}+\frac{4}{\nu^2}+\frac{2^2}{\nu^3}+\frac{6}{\nu^2}+\frac{3^2}{\nu^3}+\frac{8}{\nu^2}+\frac{4^2}{\nu^3}+\ \ldots$$

ισούται με $\dfrac{8\nu^2+9\nu+1}{6\nu^2}$ και να εξετάσετε αν η πιο πάνω σειρά συγκλίνει.

(β) Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2\left(x^2-1\right)dx$.

(γ) (i) Να δείξετε ότι μια ρίζα της $\mathrm{g}(x)=\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{2}{3}$ είναι ο αριθμός 2.

(ii) Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)=x^2-1$, τις ευθείες $x=-2$ $x=\alpha$, $\alpha>1$ και τον άξονα των τετμημένων ισούται με $4\,\tau.\mu.$, να υπολογίσετε το α .

(δ) Το χωρίο που ορίζεται από την $f(x)=x^2-1$, τις ευθείες $x=1$, $x=2$ και τον άξονα των τετμημένων κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y=3$. Να βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

4. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση (C): $x^2+y^2-4x-8y+4=0$ με κέντρο Κ και παραβολή (P): $y^2=4ax$ η οποία περνά από το κέντρο του κύκλου (C).

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και την εστία Ε της παραβολής καθώς και την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής και την ακτίνα του κύκλου.

(β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο κέντρο Κ του κύκλου (C) τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Α. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Τ του κύκλου τέμνει την ευθεία $x=x_{\mathrm{A}}$ στο σημείο Γ. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΓΤ.

(γ) Αν Β,Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου (C) και της παραβολής (P) και η περίμετρος του τετραπλεύρου ΚΒΕΔ είναι ίση με λ μονάδες, $\lambda \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι το μέσο Ν του ΒΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία (η): $2x-\lambda+12=0$

5. (α) Να γράψετε πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης λέγονται ανεξάρτητα και να αποδείξετε ότι αν Α, Β ανεξάρτητα τότε ισχύει $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$.

(β) Δίνονται τα σύνολα:

K={ 0 , 5 }

Λ={ 2 , 3 , 4 }

M= { 6 , 7 , 8 , 9 }

Σχηματίζουμε τριψήφιους αριθμούς επιλέγοντας τυχαία ένα ψηφίο από κάθε σύνολο Κ, Λ, Μ

(i) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Ε: ΄΄ Ο τριψήφιος αριθμός να αρχίζει με το ψηφίο 4 ΄΄

Ζ: ΄΄ Ο τριψήφιος αριθμός περιέχει ένα τουλάχιστον περιττό ψηφίο ΄΄

Η: ΄΄ Ο τριψήφιος αριθμός να είναι μεγαλύτερος του 700 ΄΄

(ii) Αν ο τριψήφιος αριθμός που επιλέξαμε περιέχει ένα τουλάχιστο περιττό ψηφίο, να βρεθεί η πιθανότητα αυτός να αρχίζει από το ψηφίο 9.

- ΤΕΛΟΣ -