

Επαναληπτικό 1

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύει $f(4x) = 4f(x) \forall x \in [1,4]$ και $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (1,4)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 12$.
3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 5, x \in [0,4]$.
4. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x - 2$ στο διάστημα $[-2,3]$.
5. Εάν η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + b \ln x$ έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και b . Ακολούθως να βρείτε το είδος των 2 ακροτάτων.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.
 - α. Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα,
 - β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $x = e$ και να δείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}, \forall x > 0$.
7. Αν $f''(x) < 0, \forall x \in [1,4], f'(1) = 0$ και $f(4) = 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0, \forall x \in [1,4]$.
8. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha. f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} & \beta. f(x) = \frac{2x^2}{x+1} & \gamma. f(x) = (x-3) \cdot e^x
 \end{array}$$
9. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$ και $B(0,4)$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας $y=1$ έτσι ώστε η γωνία AMB να είναι μέγιστη.
10. Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\alpha)$.